Suite définie de manière implicite

Exercice N° 1 :

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. Cette solution est notée x_n.
2. Quelle relation relie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \underset{n\to+\infty}{\circ}(1)$.
4. Montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n}\right).$$
5. En exploitant que
$$\forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$
montrer que
$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \underset{n\to+\infty}{\circ}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice N° 2 :

1. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que l'équation
$$x^n = x + n$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ possède une unique solution x_n.
2. Montrer que (x_n) converge vers 1.
3. Détermine un développement asymptotique à deux termes de la suite (x_n).